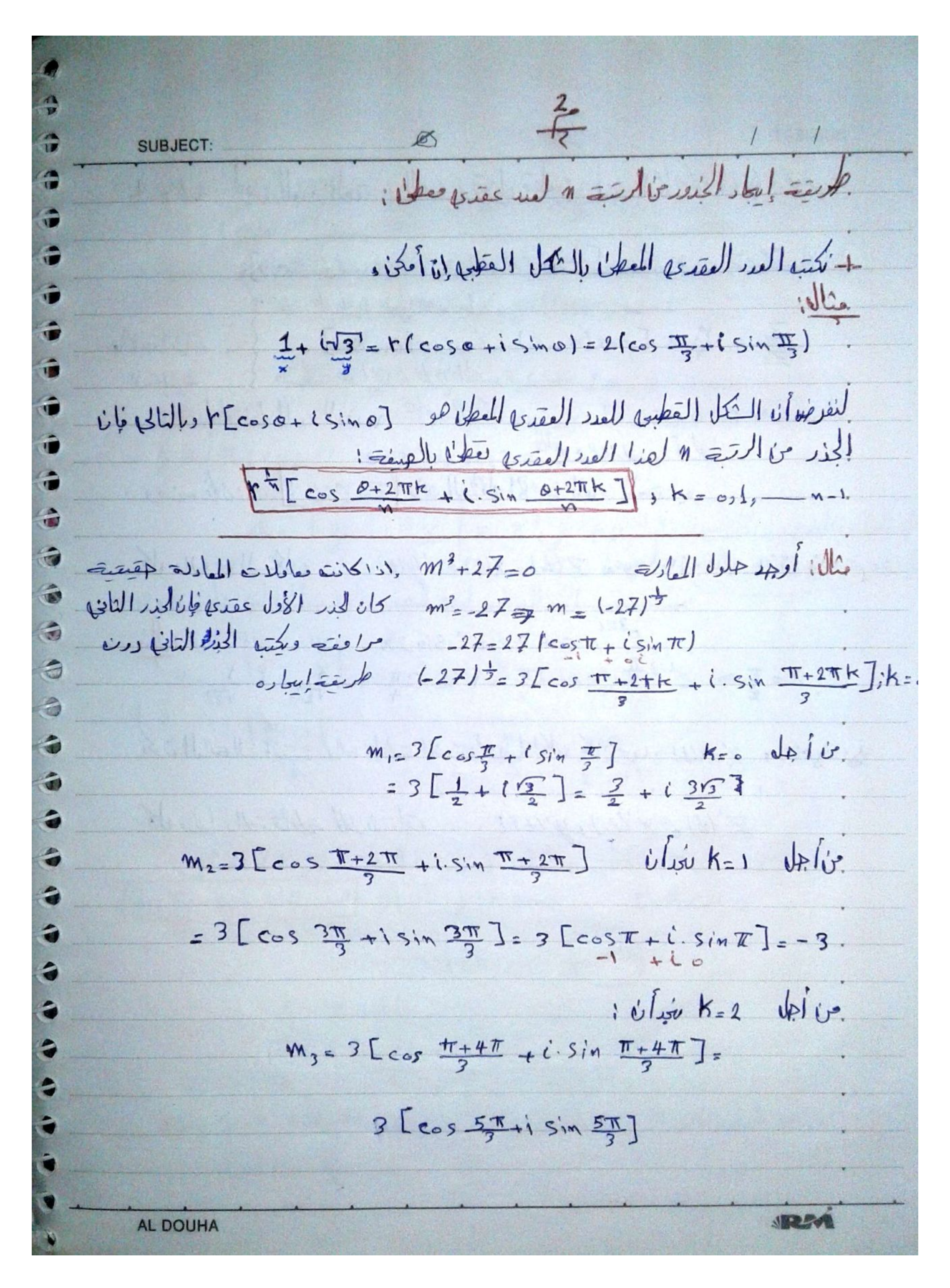


طريقة إيجاد الجذور من الرتبة n لعدد عقدي معطى:

+ نكتب العدد العقدي المعطى بالشكل القطبي إن أمكن،

مثال:

$$\underbrace{1}_{x} + i\underbrace{\sqrt{3}}_{y} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

لنفرض أن الشكل القطبي للعدد العقدي المعطى هو $r[\cos\theta + i\sin\theta]$ وبالتالي فإن الجذر من الرتبة n لهذا العدد العقدي تعطى بالصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i.\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right] \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

مثال: أوجد حلول المعادلة $m^3+27=0$ ، اذا كانت معاملات المعادلة حقيقية كان الجذر الأول عقدي فإن الجذر الثاني مرافقه ونكتب الجذر الثاني دون طريقة إيجاده

$$m^3 = -27 \Rightarrow m = (-27)^{\frac{1}{3}}$$

$$-27 = 27(\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{i\sin\pi}_{+\,i0})$$

$$(-27)^{\frac{1}{3}} = 3\left[\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i.\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right]; k=$$

من أجل $k=0$

$$m_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 3\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

من أجل $k=1$ نجد أن

$$m_2 = 3\left[\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right]$$

$$= 3\left[\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right] = 3[\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{i.\sin\pi}_{+\,i0}] = -3$$

من أجل $k=2$ نجد أن:

$$m_3 = 3\left[\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right] =$$

$$3\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$$

SUBJECT:

$$= 3\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 3$$

$$= 3\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right] = 3\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

مثال: أوجد جميع جذور المعادلة $m^6 - 64 = 0$ ، إذا كان العدد موجب $\theta = 0$

$m^6 = 64 \Rightarrow m = (64)^{\frac{1}{6}}$ ، إذا كان العدد سالب $\theta = \pi$

لنكتب العدد 64 بالشكل القطبي.

$$64 = 64(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$(64)^{\frac{1}{6}} = 2\left(\cos\frac{0+2\pi k}{6} + i\sin\frac{0+2\pi k}{6}\right]; k = 0,1,2,3,4,5$$

• من أجل $k=0$ نجد:

$$m_1 = 2[\cos 0 + i\sin 0] = 2$$

• من أجل $k=1$ نجد:

$$m_2 = 2\left[\cos\frac{0+2\pi}{6} + i\sin\frac{0+2\pi}{6}\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= 1 + i\sqrt{3}$$

• من أجل $k=2$ نجد:

$$m_3 = 2\left[\cos\frac{0+4\pi}{6} + i\sin\frac{0+4\pi}{6}\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[-\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right] = 2\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 + i\sqrt{3}$$

• من أجل $k=3$ نجد:

$$m_4 = 2\left[\cos\frac{0+6\pi}{6} + i\sin\frac{0+6\pi}{6}\right]$$

$$= 2\left[\cos\pi + i\sin\pi\right] = -2$$

• من أجل $k=4$ نجد:

$$m_5 = 2\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 1 - i\sqrt{3}$$

• من أجل $k=5$ نجد:

$$m_6 = 2\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 - i\sqrt{3}$$

ملاحظة: {نجد أن 0 مرافق 3، 1 مرافق 4، 2 مرافق 5}

SUBJECT:

بعض قواعد صيغ الاشتقاق:

1. أياً كان k حقيقي أو عقدي فإن: $(e^{kx})' = k.e^{kx}$

2. أياً كان α حقيقي أو عقدي فإن: $(x^{\alpha})' = \alpha . x^{\alpha-1}$

3. $(x^{\alpha}.e^{kx})' = \alpha . x^{\alpha-1} e^{kx} + k . x^{\alpha} . e^{kx}$

مفهوم الارتباط والاستقلال الخطي:

تعريف: ليكن لدينا مجموعة من الدوال $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ المعرفة والمستمرة على المجال I نقول على هذه المجموعة أنها مرتبطة خطياً على المجال إذا وفقط إذا وجدت مجموعة من الثوابت العددية $\{A_j\}_{j=1}^{m}$ الغير معدومة جميعها بآنٍ واحد بحيث أن:

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \text{———} + A_m . y_m = 0$$

⊛ بفرض أن $A_m \neq 0$ عندئذٍ $A_m . y_m = -A_1 . y_1 - A_2 y_2 - \text{———} - A_{m-1} . y_{m-1}$

$$y_m = \beta_1 . y_1 + \beta_2 . y_2 + \text{———} + \beta_{m-1} . y_{m-1}$$

⊛ $j = 1, 2, \text{———} m-1$ ؛ $\beta_j = -\dfrac{A_j}{A_m}$

ومنه نستنتج أن مجموعة الدوال $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ تكون مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا كان أحد عناصر هذه المجموعة يكتب كتركيب خطي لبقية عناصر المجموعة.

مثال: ليكن لدينا مجموعة الدوال: $\{y_1 = \cos 2x ; \ y_2 = \cos^2 x ; \ y_3 = \sin^2 x\}$

هل هذه المجموعة مرتبطة أم لا؟

هذه المجموعة مرتبطة لأننا نعلم أن $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

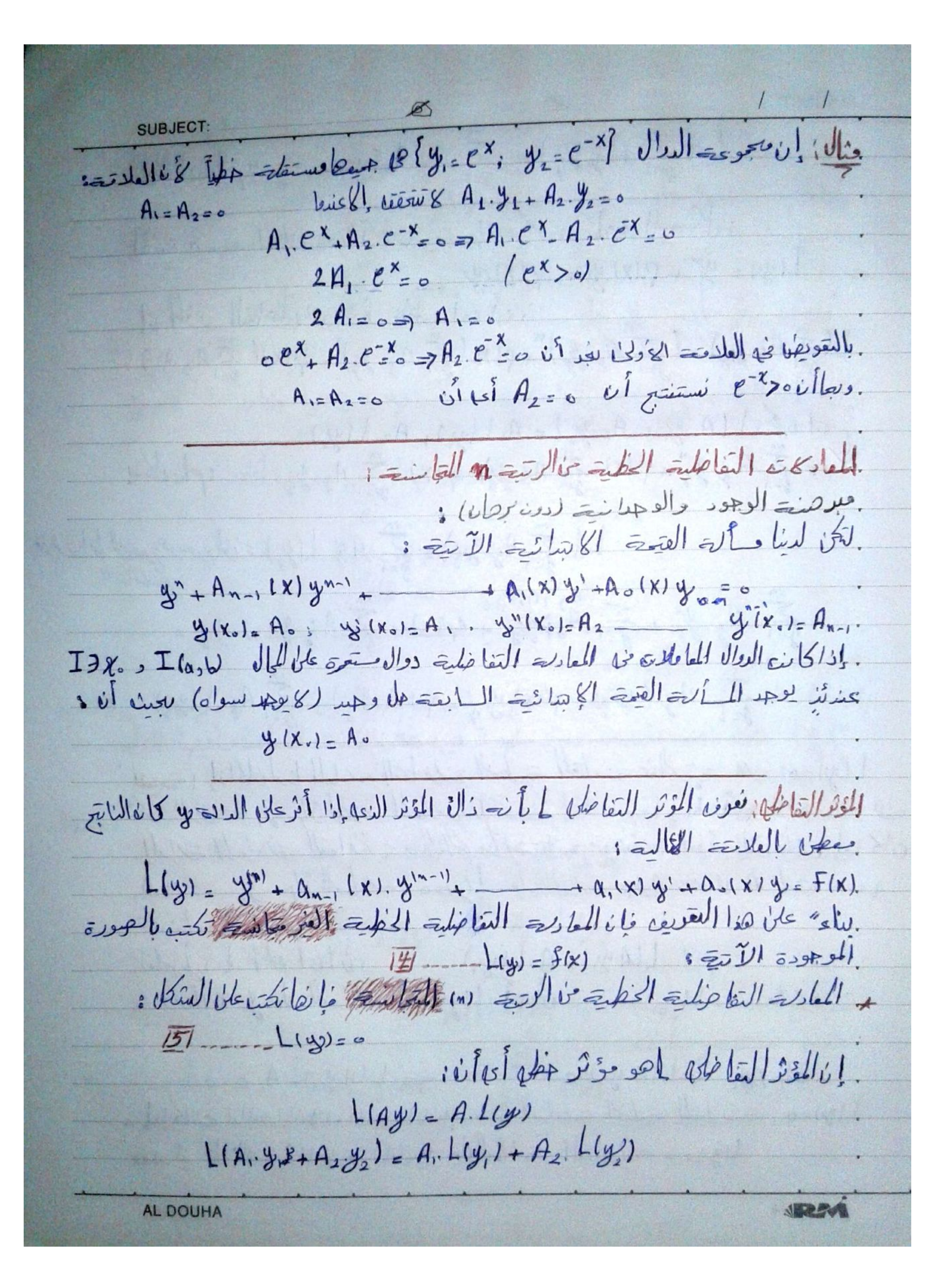
أي أن الدالة $y_1 = \cos 2x$ كتبت كتركيب خطي لبقية دوال المجموعة

⊛ $y_2 = \cos^2 x$ ، $y_3 = \sin^2 x$ ، $\beta_1 = 1$ ، $\beta_2 = i$

ونقول عن المجموعة $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ إنها مستقلة خطياً إذا تحققت العلاقة ⊛ من أجل ثوابت عددية جميعها أصفار

$A_1 . y_1 + A_2 . y_2 + \text{———} + A_m . y_m = 0 \Rightarrow$

$$A_1 = A_2 = \text{———} = A_m = 0$$



SUBJECT:

مثال: إن مجموعة الدوال $\{y_1 = e^{x} ; \ y_2 = e^{-x}\}$ جميعها مستقلة خطياً لأن العلاقة:
$A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 0$ لا تتحقق إلا عندما $A_1 = A_2 = 0$

$$A_1 \cdot e^{x} + A_2 \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow A_1 \cdot e^{x} - A_2 \cdot e^{-x} = 0$$

$$2A_1 \cdot e^{x} = 0 \qquad (e^{x} > 0)$$

$$2A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

بالتعويض في العلاقة الأولى نجد أن $0 e^{x} + A_2 \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow A_2 \cdot e^{-x} = 0$

وبما أن $e^{-x} > 0$ نستنتج أن $A_2 = 0$ أي أن $A_1 = A_2 = 0$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n المتجانسة:

مبرهنة الوجود والوحدانية (دون برهان):

لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية الآتية:

$$y^{n} + A_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \longrightarrow A_1(x)\, y' + A_0(x)\, y = 0$$

$$y(x_0) = A_0 \ ; \quad y'(x_0) = A_1 \ , \quad y''(x_0) = A_2 \ \text{———} \ y^{n-1}(x_0) = A_{n-1}$$

إذا كانت الدوال المعاملات في المعادلة التفاضلية دوال مستمرة على المجال $I(a,b)$ و $I \ni x_0$

عندئذ يوجد المسألة القيمة الابتدائية السابقة حل وحيد (لا يوجد سواه) بحيث أن:

$$y(x_0) = A_0$$

المؤثر التفاضلي: نعرف المؤثر التفاضلي L بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على الدالة y كان الناتج معطى بالعلاقة التالية:

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \longrightarrow a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

بناءً على هذا التعريف فإن المعادلة التفاضلية الخطية الغير متجانسة تكتب بالصورة الموجودة الآتية:

$$L(y) = f(x) \quad \text{......} \boxed{4}$$

* المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة (n) المتجانسة فإنها تكتب على الشكل:

$$\boxed{5} \text{......} \ L(y) = 0$$

إن المؤثر التفاضلي L هو مؤثر خطي أي أنه:

$$L(Ay) = A \cdot L(y)$$

$$L(A_1 \cdot y_1 + A_2 y_2) = A_1 \cdot L(y_1) + A_2 \cdot L(y_2)$$

AL DOUHA

SUBJECT:

بشكل عام: $L(\sum_{j=1}^{m} A_j y_j) = \sum_{j=1}^{m} A_j L(y_j)$

لنثبت صحة العلاقة الأخيرة في حالة كون L من الشكل:

$L(y) = y'' + p(x) y' + q(x).y$

إن المؤثر التفاضلي هو مؤثر خطي أي أن:

$L(\sum_{j=1}^{m} A_j.y_j) = (\sum_{j=1}^{m} A_j.y_j)'' + p(x)(\sum_{j=1}^{m} A_j.y_j)' + q(x)(\sum_{j=1}^{m} A_j.y_j)$

كون أن: $L(A_1.y_1 + A_2.y_2) = A_1 L(y_1) + A_2.L(y_2)$

بشكل عام: $= \sum_{j=1}^{m} A_j.y_j'' + p(x).\sum_{j=1}^{m} A_j.y_j' + q(x).\sum_{j=1}^{m} A_j.y_j$

$L(\sum_{j=1}^{m} A_j.y_j) = \sum_{j=1}^{m} A_j.L(y_j)$ مؤثر تفاضل المجموع هو مجموع المؤثرة التفاضلية

$= \sum_{j=1}^{m} A_j.y_j'' + \sum_{j=1}^{m} A_j\, p(x).y_j' + \sum_{j=1}^{m} A_j.q(x).y_j =$

$= \sum_{j=1}^{m} A_j(y_j'' + p(x).y_j' + q(x).y_j) = \sum_{j=1}^{m} A_j.L(y_j)$. *

النتيجة: إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n , $L(y)=0$ تكون الدالة y_1 حلاً لهذه المعادلة إذا وفقط إذا $L(y_1)=0$ أي إذا حققت هذه الدالة المعادلة التفاضلية وبالتالي وبالاستفادة من خواص المؤثر التفاضلي: إذا كان للدالة y_k حلاً للمعادلة $L(y)=0$ فإن الدالة $A.y_k$ بحيث A ثابت عددي تكون أيضاً حل.

نعلم بأن L خطي أي أن: $L(Ay_1) = A.L(y_1)$

وبما أن y_1 حل للمعادلة $L(y)=0$ أي أن $L(y_1)=0$ ومنه فإن:

$\Leftarrow L(A.y_1) = A.0 = 0$ $\Leftarrow L(A.y_1)=0$ Ay_1 حلاً

- إذا كانت لدالة $y(t) = y_1(t) + i\,y_2(t)$ حلاً للمعادلة الخطية المتجانسة $L(y)=0$ فعندئذٍ كل من $y_1(t)$, $y_2(t)$ حل للمعادلة التفاضلية $L(y)=0$

$$L(y(t)) = L(y_1(t) + i y_2(t)) = L(y_1(t)) + i L(y_2(t))$$

إذا كان $y(t)$ حل عندئذٍ $L(y(t)) = 0$ ومنه فإن:

$L(y_1(t)) + i L(y_2(t)) = 0 + i0$ وبحسب تعريف تساوي عددين عقديين ينتج أن:

$L(y_1(t)) = 0$; $L(y_2(t)) = 0$

أي أن y_1 حل و y_2 حل

مثال: إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$ وكان $y = e^{2ix}$ حلاً لها فعندئذٍ الحل العام لها هو:

أولاً بحسب $y = A_1 \cdot \cos 2x + A_2 \cdot \sin 2x$

$e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$

$A_1 \cdot \cos 2x + A_2 \cdot \sin 2x = 0$

$A_1 = 1$, $A_2 = i$ $\quad$ $A_1 = A_2 = 0 \Rightarrow$ خطأ

مبرهنة (مبدأ التراكيب):

إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n و $L(y) = 0$ وإذا كانت $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ حلول لهذه المعادلة عندئذٍ أي تركيب خطي من هذه الحلول هو أيضاً حل لهذه المعادلة.

الإثبات: لنفرض أن $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n ؛ $L(y) = 0$ ولنثبت أن $k \leq m$ ، $\sum_{j=1}^{k} A_j \cdot y_j$ (مجموعة من الحلول) هو أيضاً حل لهذه المعادلة من أجل ذلك نعلم

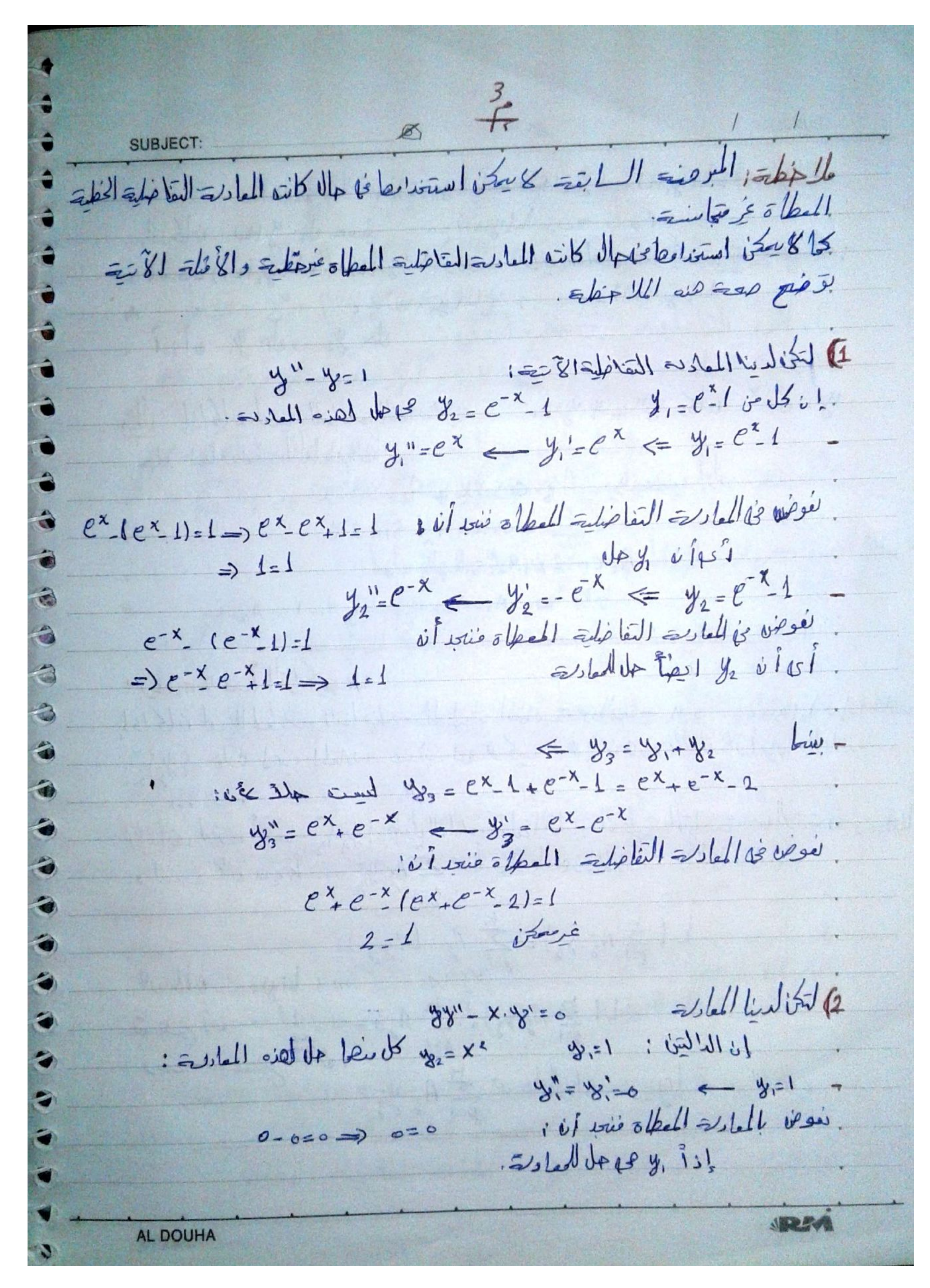
$$L\left(\sum_{j=1}^{k} A_j \cdot y_j\right) = \sum_{j=1}^{k} A_j \cdot L(y_j)$$

لكن نعلم أن $L(y) = 0$; $\forall j = 1, 2, ___, m$

نستنتج أن $L\left(\sum_{j=1}^{k} A_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{k} A_j \cdot 0 = 0$

ومنه نستنتج أن:

$\sum_{j=1}^{k} A_j \cdot y_j$ هو حل للمعادلة $L(y) = 0$ وهو المطلوب.



ملاحظة: المبرهنة السابقة لا يمكن استخدامها في حال كانت المعادلة التفاضلية الخطية المعطاة غير متجانسة.
كما لا يمكن استخدامها في حال كانت المعادلة التفاضلية المعطاة غير خطية والأمثلة الآتية توضح صحة هذه الملاحظة.

1) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية: $y'' - y = 1$

إن كل من $y_1 = e^x - 1$ و $y_2 = e^{-x} - 1$ هو حل لهذه المعادلة.

- $y_1 = e^x - 1 \Rightarrow y_1' = e^x \longrightarrow y_1'' = e^x$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أنه: $e^x - (e^x - 1) = 1 \Rightarrow e^x - e^x + 1 = 1$
$\Rightarrow 1 = 1$
أي أنه y_1 حل

- $y_2 = e^{-x} - 1 \Rightarrow y_2' = -e^{-x} \longrightarrow y_2'' = e^{-x}$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أنه $e^{-x} - (e^{-x} - 1) = 1$
$\Rightarrow e^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$
أي أنه y_2 أيضاً حل للمعادلة

- بينما $y_3 = y_1 + y_2 \Rightarrow$
$y_3 = e^x - 1 + e^{-x} - 1 = e^x + e^{-x} - 2$ ليست حلاً لأن:
$y_3' = e^x - e^{-x} \longrightarrow y_3'' = e^x + e^{-x}$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أنه:
$e^x + e^{-x} - (e^x + e^{-x} - 2) = 1$
$2 = 1$ غير ممكن

2) لتكن لدينا المعادلة $yy'' - x \cdot y' = 0$

إن الدالتين: $y_1 = 1$ و $y_2 = x^2$ كل منها حل لهذه المعادلة:

- $y_1 = 1 \longrightarrow y_1' = y_1'' = 0$

نعوض بالمعادلة المعطاة فنجد أنه: $0 - 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

إذاً y_1 هو حل للمعادلة.

SUBJECT:

- $y_2 = x^2 \longrightarrow y_2' = 2x \longrightarrow y_2'' = 2$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أن: $x^2(2) - x(2x) = 0 \Rightarrow$

إذاً y_2 هو حل للمعادلة: $2x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$

- نلاحظ أن الدالة $y_3 = y_1 + y_2 \longrightarrow y_3 = x^2 - 1$

$y_3' = 2x \longrightarrow y_3'' = 2$

نعوض بالمعادلة المعطاة:

$(x^2 - 1)(2) - x(2x) = 0$

$2x^2 - 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow -2 = 0$ غير ممكن

أي أن الدالة $y_3 = y_1 + y_2$ ليست حلاً

تعريف الحل العام: ليكن لدينا المعادلة التفاضلية $L(y) = f(x)$ بحيث أن L مؤثر تفاضلي من الرتبة n الحل العام لهذه المعادلة هو ذلك الحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية ويحتوي على عدد من الثوابت الكيفية يساوي رتبة المعادلة التفاضلية.

مثال: إذا كان لدينا المعادلة $y'' - y = 1$

إن الدالة: $y = A_1 \cdot e^{x} + A_2 \cdot e^{-x} - 1$ تشكل حل عام لأنها تحقق المعادلة التفاضلية وتحتوي على عدد من الثوابت الكيفية يساوي رتبة المعادلة التفاضلية وأي حل ينتج عن الحل العام بإعطاء الثوابت الكيفية قيم عددية معينة ندعوه حلاً خاصاً.

مبرهنة "دون برهان":

لكل معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة n من الشكل $L(y) = 0$ يوجد n حلاً مستقلاً وإذا كانت هذه الحلول هي $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ فعندئذ الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالشكل:

$y_h = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \cdots + A_n \cdot y_n$ حل عام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

ونكتبه: $y_h = \sum_{j=1}^{n} A_j \cdot y_j$

SUBJECT:

ملاحظات حول المبرهنة:

1- الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هو الحل العام الوحيد (لا يوجد سواه) طالما تتحقق مبرهنة الوجود والوحدانية.

2- أي حل نحصل عليه من الحل العام بإعطاء الثوابت العددية قيم عددية معينة ندعوه حلاً خاصاً لهذه المعادلة.

3- مجموعة الحلول $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ ندعوها المنظومة الأساسية «قاعدة الحلول» للمعادلة التفاضلية.

4- قد يكون لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة أكثر من قاعدة حلول واحدة وإذا ما تم استخدام هذه القواعد عندئذٍ فيكون لدينا أكثر من حل عام واحد وهذا يناقض الملاحظة الأولى ونقول بأنه لا يوجد تناقض لأن الحل العام وحيد طالما تتحقق شروط مبرهنة الوجود والوحدانية وعندئذٍ يمكن رد أي من القاعدتين إلى القاعدة الأخرى كما في الأمثلة الآتية:

مثال1: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية: $y''-4y=0$

إن الدالتين $y_1=e^{2x}$, $y_2=e^{-2x}$ هما قاعدة الحلول للمعادلة المعطاة لنثبت أن y_1 و y_2 هما قاعدة الحلول.

أ- لنثبت أن كل دالة هي حل للمعادلة المعطاة

$$y_1=e^{2x} \longrightarrow y_1'=2e^{2x} \longrightarrow y_1''=4e^{2x}$$

$$4e^{2x}-4e^{2x}=0 \Rightarrow 0=0$$ y_1 هي حل

$$y_2=e^{-2x} \longrightarrow y_2'=-2e^{-2x} \longrightarrow y_2''=4e^{-2x}$$

y_2 هي حل

ب- نلاحظ أن عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة ويساوي 2.

ج- لنثبت أن الدوال مستقلة خطياً أي $A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 0 \Leftarrow A_1=A_2=0$

$$① \quad A_1 \cdot e^{2x} + A_2 \cdot e^{-2x} = 0 \Rightarrow 2A_1 e^{2x} - 2A_2 \cdot e^{-2x} = 0 \quad ②$$

نضرب المعادلة الأولى بـ 2 ونجمعهما

$$4A_1 \cdot e^{2x} = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

نعوض A_1 بإحدى المعادلتين نجد أن $0 + A_2 \cdot e^{-2x} = 0 \Rightarrow A_2 = 0$

$$A_1 = A_2 = 0$$

أي أن الدوال مستقلة وبالتالي فإن الحل العام :

$$y_h = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x}$$

بحيث أن c_1 ، c_2 ثوابت كيفية

مثال 2: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية : $y''' + 9y' = 0$

إن الدوال $y_1 = 1$ ، $y_2 = \cos 3x$ ، $y_3 = \sin 3x$ تمثل قاعدة الحلول.

ع ن : 1) كل دالة من هذه الدوال هي حل.

2) عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة.

3) علينا أن نثبت بأن هذه الدوال مستقلة خطياً أي أن تتحقق العلاقة :

$$A_1 y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 0 \longrightarrow A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

$\longrightarrow$ $A_1 + A_2 \cdot \cos 3x + A_3 \cdot \sin 3x = 0$ ——— (1)

باشتقاق $\longrightarrow$ $-3A_2 \cdot \sin 3x + 3A_3 \cdot \cos 3x = 0$ ——— (2)

باشتقاق $\longrightarrow$ $-9A_2 \cdot \cos 3x + 9A_3 \cdot \sin 3x = 0$ ——— (3)

يكون لجملة المعادلتين حل وحيد إذا وفقط إذا كان محدد الأمثال لا يساوي الصفر

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3\sin 3x & 3\cos 3x \\ -9\cos 3x & -9\sin 3x \end{vmatrix} = 27\sin^2 3x + 27\cos^2 3x$$

$$= 27 \neq 0$$

وبما أن المعادلتين متجانستين فإن الحل الوحيد هو الحل الصفري أي أن

$$A_2 = A_3 = 0$$

نعوض بـ (1) $A_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$

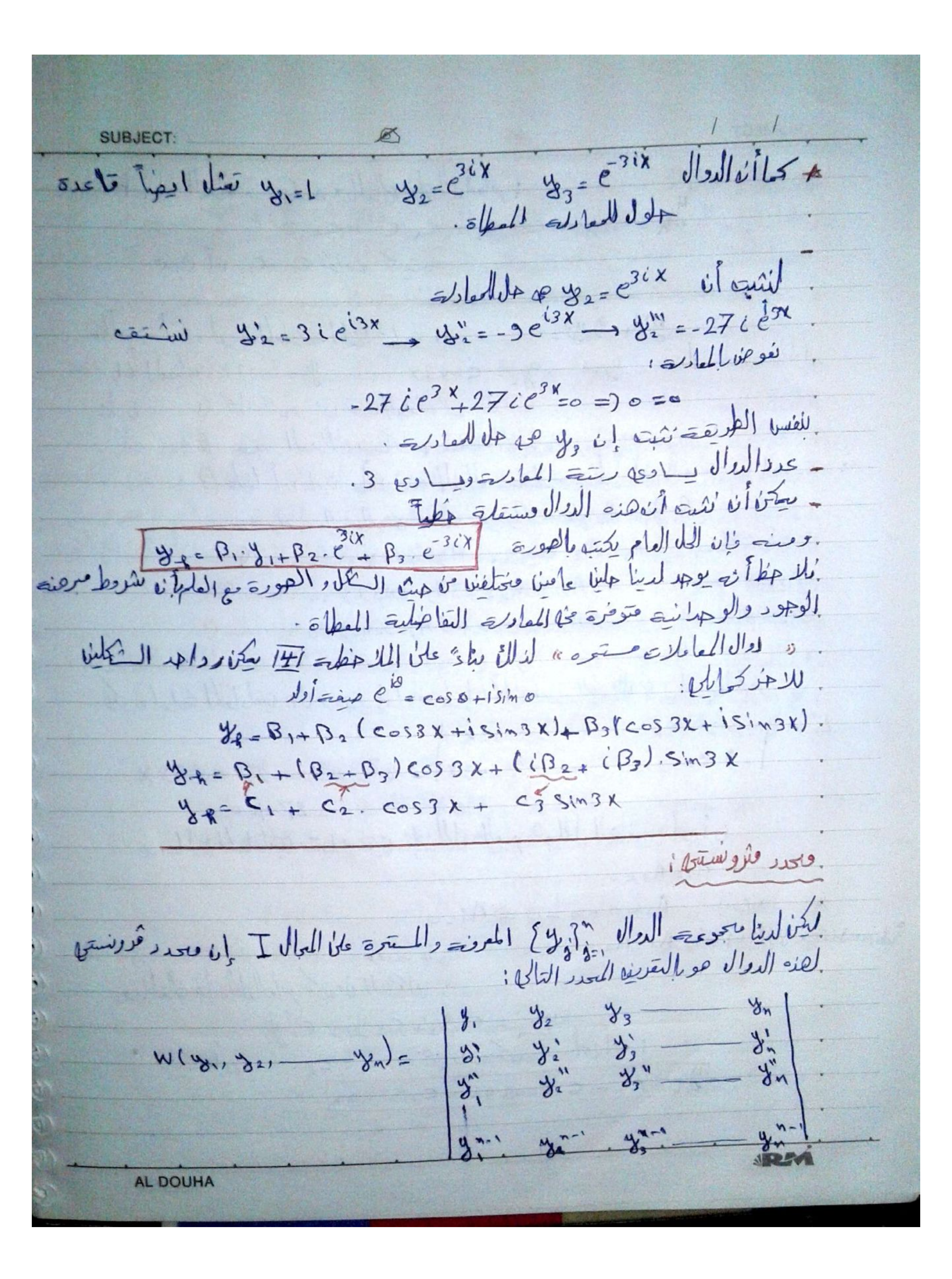
ومنه فإنه $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ أي أن الدوال مستقلة خطياً

وبالتالي فإن الحل العام يكون من الشكل :

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 \cdot y_2 + c_3 \cdot y_3$$

بحيث أن c_1, c_2, c_3 هي ثوابت كيفية أي أن :

$$\boxed{y_h = c_1 + c_2 \cdot \cos 3x + c_3 \sin 3x}$$



* كما أن الدوال $y_3 = e^{-3ix}$ ، $y_2 = e^{3ix}$ ، $y_1 = 1$ تمثل ايضاً قاعدة حلول للمعادلة المعطاة.

- لنثبت أن $y_2 = e^{3ix}$ هو حل المعادلة

نشتق $y_2' = 3ie^{i3x} \longrightarrow y_2'' = -9e^{i3x} \longrightarrow y_2''' = -27ie^{i3x}$

نعوضها بالمعادلة:

$$-27ie^{3x} + 27ie^{3x} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

بنفس الطريقة نثبت إن y_3 هو حل المعادلة.

- عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة ويساوي 3.
- يمكن أن نثبت أن هذه الدوال مستقلة خطياً

ومنه فإن الحل العام يكتب بالصورة

$$y_h = \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot e^{3ix} + \beta_3 \cdot e^{-3ix}$$

نلاحظ أنه يوجد لدينا حلين عامين مختلفين من حيث الشكل والصورة مع العلم أن شروط مبرهنة الوجود والوحدانية متوفرة في المعادلة التفاضلية المعطاة.

« دوال المعاملات مستمرة » لذلك بناءً على الملاحظة [4] يمكن رد احد الشكلين للاخر كما يلي:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ صيغة أويلر

$$y_h = \beta_1 + \beta_2(\cos 3x + i\sin 3x) + \beta_3(\cos 3x + i\sin 3x)$$

$$y_h = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)\cos 3x + (i\beta_2 + i\beta_3)\sin 3x$$

$$y_h = c_1 + c_2 \cdot \cos 3x + c_3 \sin 3x$$

محدد فرونسكي:

ليكن لدينا مجموعة الدوال $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ المعروفة والمستمرة على المجال I إن محدد فرونسكي لهذه الدوال هو بالتعريف المحدد التالي:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & y_3^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

★ وإن قيمة محدد فرونسكي قد تكون دالة تتعلق بالمتغير المستقل x .

مثال: إذا كانت لدينا الدوال $\{x, x^2, x^3\}$

$$W(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} =$$

$$= x\begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - x^2\begin{vmatrix} 1 & 3x^2 \\ 0 & 6x \end{vmatrix} + x^3\begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

★ إن قيمة محدد فرونسكي قد تكون ثابتاً عددياً . مغايراً للصفر.

مثال:

إذا كانت لدينا الدوال $\{e^x, e^{-x}\}$

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1-1 = -2$$

★ قد تكون قيمة محدد فرونسكي صفراً

مثال: إذا كانت لدينا الدوال $\{2x, 6x\}$

$$W(2x, 6x) = \begin{vmatrix} 2x & 6x \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12x - 12x = 0$$

مبرهنة: إذا كانت الدوال $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ مرتبطة خطياً فعندئذ قيمة محدد فرونسكي تكون معدومة أي تساوي الصفر.

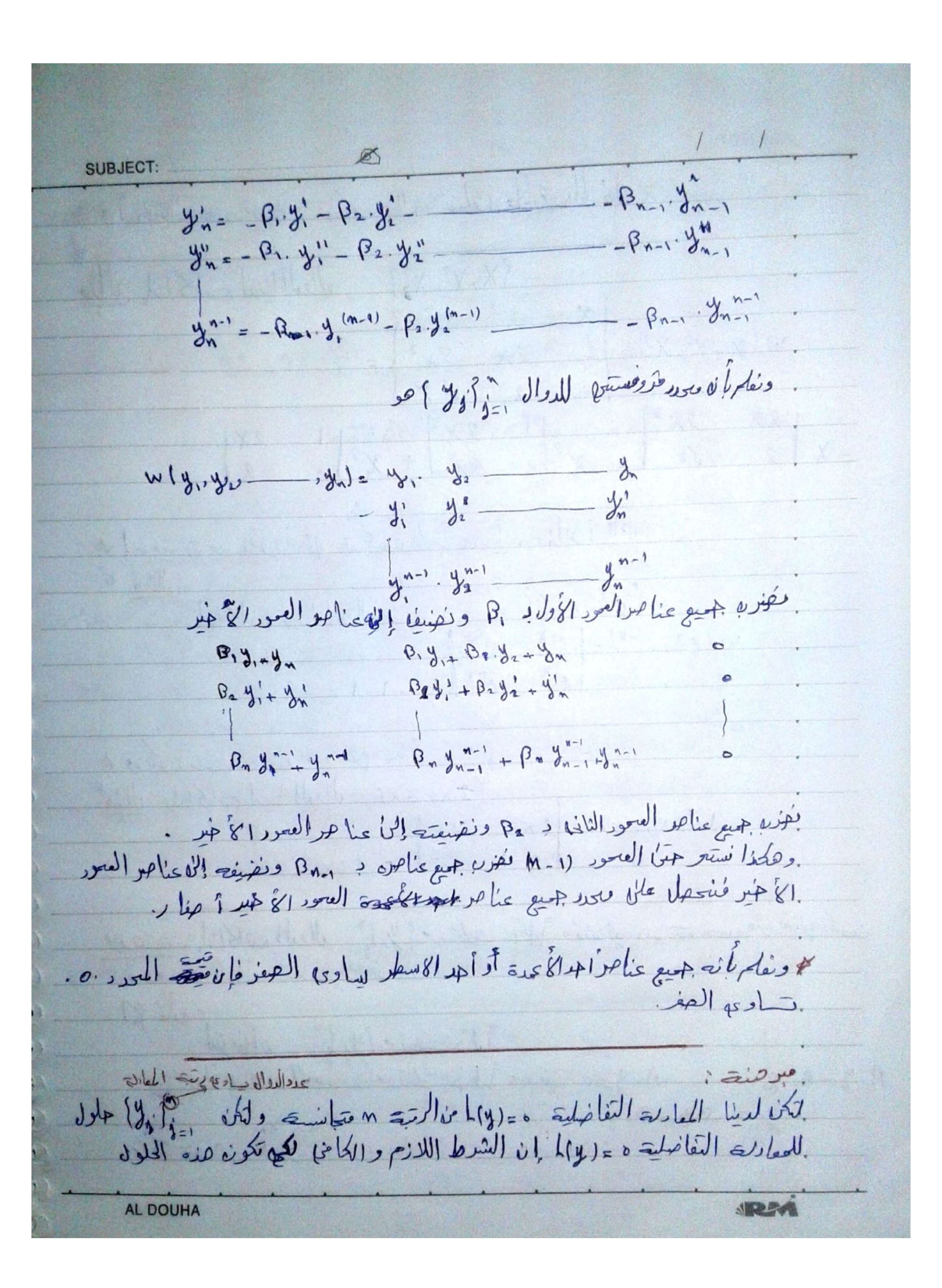
الإثبات:

لنفرض أن $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ مرتبطة خطياً

بما أن هذه المجموعة مرتبطة خطياً عندئذ $A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n = 0$

$$y_n = -\beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - \cdots - \beta_{n-1} y_{n-1}$$

نشتق هذه العلاقة $(n-1)$ مرة متتالية فنجد أن:


SUBJECT:

$$y_n' = -\beta_1 . y_1' - \beta_2 . y_2' - \cdots - \beta_{n-1} . y_{n-1}'$$
$$y_n'' = -\beta_1 . y_1'' - \beta_2 . y_2'' - \cdots - \beta_{n-1} . y_{n-1}''$$
$$\vdots$$
$$y_n^{n-1} = -\beta_1 . y_1^{(n-1)} - \beta_2 . y_2^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1} . y_{n-1}^{n-1}$$

ونعلم أن محدد فرونسكي للدوال $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ هو

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

نضرب جميع عناصر العمود الأول بـ β_1 ونضيفها إلى عناصر العمود الأخير

$$\begin{vmatrix} \beta_1 y_1 + y_n & \beta_1 y_1 + \beta_2 . y_2 + y_n \\ \beta_2 y_1' + y_n' & \beta_2 y_1' + \beta_2 y_2' + y_n' \\ \vdots & \vdots \\ \beta_n y_1^{n-1} + y_n^{n-1} & \beta_n y_{n-1}^{n-1} + \beta_n y_{n-1}^{n-1} + y_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$

نضرب جميع عناصر العمود الثاني بـ β_2 ونضيفه إلى عناصر العمود الأخير .
وهكذا نستمر حتى العمود $(n-1)$ نضرب جميع عناصره بـ β_{n-1} ونضيفه إلى عناصر العمود الأخير فنحصل على محدد جميع عناصر العمود الأخير أصفار .

★ ونعلم بأنه جميع عناصر أحد الأعمدة أو أحد الأسطر يساوي الصفر فإن قيمة المحدد ٥. تساوي الصفر.

ملاحظة :

(عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة)

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية $L(y)=0$ من الرتبة n متجانسة وليكن $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ حلول للمعادلة التفاضلية $L(y)=0$ إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون هذه الحلول

SUBJECT:

مستقلة هو أن يكون قيمة محدد فرونسكي لا يساوي الصفر.

الإثبات: (⇐) لنفرض بأن الحلول مستقلة ولنثبت أن $W(y_1, y_2, \text{———}, y_n) = 0$

بما أن $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ هذا يعني أن:

$$A_1 . y_1 + A_2 . y_2 + \text{———} + A_n . y_n = 0 \quad \text{——} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow A_1 = A_2 = \text{———} = A_n = 0$$

نشتق هذه المعادلة $(n-1)$ مرة متتالية فنجد أن:

$$\left.\begin{aligned} &A_1 . y_1' + A_2 . y_2' + \text{———} + A_n . y_n' = 0 \\ &A_1 . y_1'' + A_2 . y_2'' + \text{———} + A_n . y_n'' = 0 \\ &\vdots \\ &A_1 . y_1^{n-1} + A_2 . y_2^{n-1} \text{———} + A_n . y_n^{n-1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{——} \quad (2)$$

إن 1 و 2 تشكل جملة n معادلة خطية إذا اعتبرنا أن المجاهيل هي $A_1, A_2, \text{———}, A_n$
يكون لجملة هاتين المعادلتين حلا وحيد هو الحل الصفري إذا وفقط إذا كان محدد الأمثال لا يساوي الصفر

$$\text{محدد الأمثال} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \text{———} & y_n \\ y_1' & y_2' & \text{———} & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \text{———} & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

لكن المحدد الموجود في الطرف الأيمن في العلاقة الأخيرة هو محدد فرونسكي أي أن

$$W(y_1, y_2, \text{———}, y_n) \neq 0$$

العكس (⇒) لنفرض بأن قيمة محدد فرونسكي لهذه الحلول لا يساوي الصفر ولنثبت أنها مستقلة بما أن $W(y_1, y_2, \text{———}, y_n) \neq 0$ (فرضاً) ⇐

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \text{———} & y_n \\ y_1' & y_2' & \text{———} & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \text{———} & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

SUBJECT:

. أي ان الجملة المعادلتين (١و٢) حل وحيد هو الحل الصفري

. تحقق العلاقة ١ من أجل ثوابت جميعها أصفار يعني بأن الدوال مستقلة خطياً.

. مرتبطة ← محدودة

. حلول هي ← الحلول مستقلة إذا كان المحدد ≠ ٠

. مرتبطة " " " = ٠

مثال ١ لتكن لدينا مجموعة الدوال $y_2 = |x^3|$ $y_1 = x^3$

$y_1 = x^3$

$$y_2 = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

1- $A_1 . y_1 + A_2 . y_2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = 0$

2- $A_1 x^3 + A_2 x^3 = 0$; $x \geq 0$

3- $A_1 x^3 + A_2 x^3 = 0$; $x < 0$

. ونلاحظ بأن المعادلتين الأخيرتين لا تتحققان بآن واحد إلا إذا كان $A_1 = A_2 = 0$ أي

أن الدوال مستقلة لنحسب قيمة محدد فرونسكي:

$$W(y_1, y_2)_{x \geq 0} = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$W(y_1, y_2)_{x < 0} = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$$
